3.2　ポテンシャルエネルギー

エネルギー(energy) は「仕事をする能力」と定義される。

ここでの「仕事」とは、もちろん、日常生活で使う言葉ではなく3-1節で定義した物理用語の事である。

力学的エネルギー（mechanical energy）には「ポテンシャルエネルギー (potential energy）」[1]と「運動エネルギー（kinetic energy）」があり、保存力の場では、それらの和は常に一定となる。これを「力学的エネルギーの保存則」と呼ぶ。

この節では、まず、ポテンシャルエネルギー[2]について述べる。

3-2-1 ポテンシャルエネルギーの定義

“potential” とは「可能性を秘めた」とか「潜在的に能力のある」という意味である。質点になした仕事、例えば、重力に逆らって地上から質量m [kg]の物体をh [m]の高さまで持ち上げたとしよう。この時の仕事はmgh [J]であるが、この時、物体になした仕事はどうなったのであろうか？消えてしまったわけではなく、その場に「潜在的に蓄えられている」と考えられる。なぜなら、そこにあるようには見えないが、その物体をその場所から落下させれば、地上に着くまでの間に外部に mgh [J] の「仕事をする能力（エネルギー）」を持っているからである。

そこで、このような、ある場所で潜在的に持つエネルギーをポテシャルエネルギーと呼び、以下のように、保存力場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ において、基準点（０）からその場所（A）までの仕事で定義される[3]。

$$U(A) \equiv -\int_0^A \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

この定義は、力の場が保存力の場でないと意味がないことに注意しよう。

この理由は、もし保存力場でなければポテシャルエネルギー$U(A)$ は仕事の経路に依存してしまうからである。すなわち、C1という経路をたどった時のA点のポテンシャル、とか、C2なる経路をたどった時のA点のポテンシャル、とか呼ばなければならなくなり、「A点で決まるエネルギー」という概念にはならない。先ほどの例で言えば、hの高さまで物体を持ち上げる時、どのような経路で持ち上げるかによってポテンシャルが変わってしまうことになる。すなわち、いつもmghとはならない。こうして、どのような経路をたどったかに無関係に一義的にポテンシャルが定義できるためには保存力場であることが要求されるのである。

また、ポテンシャルの大きさは基準点によるので、その分、不定性があることにも注意しよう。従って、各点間のポテンシャルエネルギーの差だけが意味を持つことになる。

ここで、任意の2点（A点とB点）のポテンシャルエネルギーの差の表式は次のようになることを示して置く[4]。

$$\Delta U \equiv U(B) - U(A) = -\int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

---

1 高校では「位置エネルギー」という言葉が使われているが同じものである。

2 以後、単にポテンシャルと呼ぶこともある。

3 いうまでもないが、ポテンシャルエネルギーは仕事で定義されるので**スカラー量**である。マイナスの符号をつけて定義する理由は、後で述べるエネルギー保存則を導く際にわかる。

4 演習問題とする。AからBに向かう経路において、必ずしも０点を通る必要がないことに注意。

3-2-2 ポテンシャルエネルギーの計算例（調和振動子）

１次元の調和振動子について見てみよう。

今、なめらかな床の上にx軸方向のみで振動する調和振動子（ばね定数ｋ）があったとする。また、調和振動子（ばね）が自然長にある時、質点の位置をx=０とする。今、質点をxの位置まで持って行った時、質点に働くばねの復元力はベクトルの形で、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\,\mathbf{r} = (-kr)\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{(3-2-3)}$$

と書ける[5]。ただし１次元（x軸上での）運動なので、原点からの位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、$\mathbf{r} = (x, y, z) = (x,0,0)$ としている。よって、復元力を成分で書くと、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x, F_y, F_z) = (-kx, -ky, -kz) = (-kx,\ 0,\ 0) \qquad \text{(3-2-4)}$$

さて、基準点を原点（x＝０）に選び、また、質点を動かした時の変位ベクトル を

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = (dx,0,0) \qquad \text{(3-2-5)}$$

と置いて、xの位置（A点）でのポテンシャルエネルギーを式(3-2-1)より求める。

$$U(A) = -\int_0^A \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^A \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\} = -\int_0^x F_x(x)dx \qquad \text{(3-2-6)}$$

なので、式(3-2-4)を代入して積分を実行すると（$U(A)$をあらためて$U(x)$ と書いて）、

$$U(x) = -\int_0^x (-kx)dx = k\int_0^x x\,dx = k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(3-2-7)}$$

が得られる[6]。

3-2-3 ポテンシャルエネルギーの計算例（重力場）

続いて、万有引力の場でのポテンシャルを調べる。ここでは特に「基準点をどう選ぶか」がポイントとなる。

今、座標系の原点に、質量Mの物体があったとする。位置ベクトル $\mathbf{r}$ （A点）にある質量m の質点が受ける万有引力の場のポテンシャルを求めよう。（ただし、M>>m とし、原点にある質量Mの物体の位置は動かないものとする。）万有引力の場は、式(3-19)と同じで、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{(3-2-8)}$$

と書ける ($r = |\mathbf{r}|$).

---

5 最右辺の式よりバネの復元力も中心力（保存力）であることがわかる。

6 ベクトルの積分の式の取り扱い方に慣れるために最初から式(3-2-1)の変形を順を追って述べた。しかし、１次元の場合なので、いきなり式(3-2-7)のように書いても良い。ここでも、結果はスカラー量になっていることを確認しよう。

まず、調和振動子と同じように、基準点を原点として計算する。

万有引力の場は中心力（保存力）の場なので、ポテンシャルが定義でき、もちろん、その値は経路によらない。そこで、計算が簡単になるよう、仕事を計算する経路を原点とA点を結ぶ直線上（動径方向）に沿う事にする。この場合、常に、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot d\mathbf{r} = -G\frac{Mm}{r^2}dr \qquad (3\text{-}2\text{-}9)$$

となる。なぜなら、動径方向の移動では $\mathbf{r}//d\mathbf{r}$ なので、$\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\ dr$ となるからである。

この値は、原点より半径 r の球表面の点で全て同じ値になる[7]。なので、(3-2-9) 式を使ってポテンシャルを計算すると、A点でのポテンシャルは、原点からr にある位置全てで同じになる。そこで、A点でのポテンシャルを$U(r)$ と書くことにすると、

$$U(r) = -\int_0^A \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^r -G\frac{Mm}{r^2}dr = GMm\int_0^r \frac{dr}{r^2} = GMm\Big[-\frac{1}{r}\Big]_0^r \qquad (3\text{-}2\text{-}10)$$

となる（原点からA点まで動径方向に沿って仕事を計算した）。

これで良さそうに見えるのだが、最後の部分を計算すると、

$$U(r) = GMm\Big[-\frac{1}{r}\Big]_0^r = GMm\Big[-\frac{1}{r}+\frac{1}{0}\Big] = \infty\ ? \qquad (3\text{-}2\text{-}11)$$

のように、どの場所もポテンシャルが無限大となる結果になり、意味のあるポテンシャル値が得られない[8]。

ここで、基準点は任意に選べることに注目しよう。

上の計算では原点を基準点としたが、その点では(r=0なので）万有引力は無限大になっている（特異点）。「そのような基準点は避けなければいけない」、という事が上の結果より言えるだろう。一方、調和振動子の時をもう一度思いかえすと、原点では復元力はゼロであった。この場合、基準点として、力がゼロになる点を選んでいたことになる。

そこで、万有引力の場でもその力の大きさがゼロになる点を基準点に選んで見る。ただし、それは無限遠方の点、という事になる。（式(3-2-9)に $r=\infty$ を代入すると、$|F|=0$ となる）。

無限遠方を基準点に取る？　何かモヤモヤした気分になるかもしれないが、今、考えている動径方向の経路上で、その無限遠方を基準点としてみよう。この場合、基準点（無限遠方）からA点（原点からの距離がrの点）まで質点を運ぶ仕事を計算してポテンシャルを求めることになる。

---

7 もし、このことが、わからなければ、２章の万有引力の場のベクトル図参照（この図は２次元的に描かれているが、対称性より同じ半径上の点では常に同じ大きさの力が動径方向を向いていることがわかる）

8 (3-2-11) 式で３番目の式のカッコの中第1項（-1/rの項）ではrの依存性が得られているが、次の項の1/0が無限大になってしまうため、それが覆い隠されてしまい、意味のある解が得られない。

実際に無限遠方の点 （$r=\infty$）を基準点とした場合を計算すると、

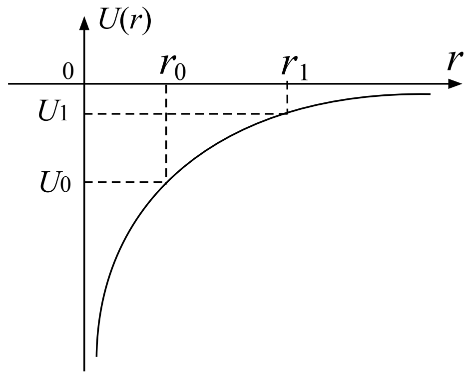
$$U(r)=-\int_{+\infty}^{A}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=-\int_{+\infty}^{r}-G\frac{Mm}{r^2}dr=GMm\int_{+\infty}^{r}\frac{dr}{r^2}=GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{+\infty}^{r} \quad (3\text{-}2\text{-}12)$$

となり、

$$U(r)=GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}=GMm\left[-\frac{1}{r}+\frac{1}{\infty}\right]=-\frac{GMm}{r} \quad (3\text{-}2\text{-}13)$$

なので、無限大が現れず、確かに意味のある解が得られた。

この場合、無限遠方の基準点のポテンシャルをゼロとしたため、ポテンシャルは下の図のように全ての場所でマイナスの値を持っていることに注意しよう（その場所まで無限遠方より質点を運ぶ際は万有引力により仕事がなされる事による）。これは異常なことが起きているわけではない。例えば、地上（$r=r_0$）から質量mの質点をある高さ($r=r_1,\quad r_1>r_0$ ）まで運んだとしよう。この時のポテンシャルの差はプラスとなるので、原点から離れる方向に質点を運ぶとポテンシャルは、確かに増加することになっている。すなわち、3-2-1節で述べたように、ポテンシャルは基準点による不定性があるので、その差だけが意味を持つ。



3.3　運動エネルギーと力学的エネルギー保存則

運動する物体も「外に仕事をする能力」を持っている。これを運動エネルギーといい、

$$T\equiv\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \quad (3\text{-}3\text{-}1)$$

で定義する[9]。このような式で表される理由は、以下で力学的エネルギー保存則を導いた際にわかる。まず、Newtonの運動方程式 $m\dfrac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}=\mathbf{F}$ の両辺に速度、$\mathbf{v}=\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ をかける[10]。

$$m\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right)=\mathbf{F}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right) \quad (3\text{-}3\text{-}2)$$

---

9 ここではTという記号を使うが、Kという記号を使う教科書も多くある。

10 「かける」とは、スカラー積をとる、ということに注意。**ベクトル（位置ベクトル）の１階微分（速度）も２階微分（加速度）も「ベクトル」である。**

ここで、左辺は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\cdot\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right)=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right)^2 \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

とかけることに注意すると、式(3-3-2)は

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right)^2\right]=\mathbf{F}\cdot\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right) \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

となる[11]。

((3-3-3)式の導き方)

一見、難しそうに見えるが、(3-3-3)式の右辺に合成関数の微分規則を適用すると左辺になる事をすぐに示せる。位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ は時間の関数であるが、その時間微分、$\mathbf{v}(t)=\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}$ （速度）も時間の関数である。なので、$\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right)^2=\mathbf{v}(t)^2$ と書いてみると、その時間微分は合成関数の微分規則より、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)^2=2\mathbf{v}(t)\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) \qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

となるが、これに $\mathbf{v}(t)=\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}$ を代入して元に戻すと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right)^2=2\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right)\cdot\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

となる。両辺に1/2 m をかければ、(3-3-3)式が得られる。

次に、 (3-3-4)式の両辺を時間積分する[12]。

今、質点がA点を $t=t_A$ に通過し、ある経路をたどって、B点を $t=t_B$ に通過したとしよう（$t_B>t_A$ ）。積分範囲は t_A から t_B とすると、

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right]dt=\int_{t_A}^{t_B}\mathbf{F}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)dt \qquad (3\text{-}3\text{-}7)$$

と書ける。ここで、両辺とも分母、分子を dt で約分をすると、

$$\int_{v_A}^{v_B}d\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right]=\int_A^B\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}3\text{-}8)$$

となる。これは、両辺とも変数変換したことに相当する。

---

11 質量は時間変化しないとしている。

12 これを「**運動方程式の積分**」という。

式(3-3-8)左辺の積分を実行すると、

$$\int_{v_A}^{v_B} d\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right] = \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_A^2 \qquad \text{(3-3-9)}$$

となり、B点の運動エネルギーとA点の運動エネルギーの差となる。

一方、式(3-3-8)の右辺はA点からB点への運動経路に沿った仕事であるが、力が保存力ならば、これは式(3-2-2)より、A点とB点のポテンシャルエネルギーの差になっている。すなわち、

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(A) - U(B) \qquad \text{(3-3-10)}$$

結局、式（3-3-9)と式（3-3-10)を等しいと置くと、

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_A^2 = U(A) - U(B) \qquad \text{(3-3-11)}$$

となるが、変形すると、

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 + U(B) \qquad \text{(3-3-12)}$$

が得られる。

今、A点もB点も、また、運動の経路も任意に選んでいるので、一般的に、

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) \qquad \text{(3-3-13)}$$

なる量は常に一定である（保存する）ことがわかる。この量 (E)を「力学的エネルギー」と言い、E=一定を「力学的エネルギー保存則」という。式(3-3-10)が保存力を前提としているので、**力学的エネルギー保存則は保存力の場で成立する**。これが「保存力」の名前の由来となっている。

この節の最初で、運動エネルギーを $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ の形に定義した。その理由は (3-3-13)式全体が一定である（保存する）ことを考えれば、運動している物体の持つ運動エネルギーを $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ の形で定義することが、「力学的エネルギー保存則」を満足する為に自然な定義となるからである。

演習4

1. 任意の2点（A点とB点）のポテンシャルエネルギーの差の表式は次のようになることを示せ。

$$\Delta U \equiv U(B) - U(A) = -\int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{(3-3-14)}$$

2. (1) 基準点をr0とするとき、任意の中心力$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ のポテンシャル $U(r)$ は、

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\ dr \qquad \text{(3-3-15)}$$

で求まる事を示せ。

(2) 逆３乗則に従う引力 $f(r) = -\dfrac{\alpha}{r^3}$ があったとする（ α は正の定数）。このときの$U(r)$ を(3-3-15)式から求めよ.（基準点を+∞ に取る）

3. 無限遠方を基準点として、質量１kgの物体が、以下の位置でもつ地球の重力のポテンシャルエネルギーを求めよ。
（１）地表（R_0点）
（２）地球の中心から10^5 km　（A点）
（３）R_0点からA点まで、質量１kgの物体を動かすのに必要な仕事
(参考)　地球の半径＝6.37×10^6 m、地球の質量＝5.98×10^{24}　kg、万有引力定数G＝6.67×10^{-11} Nm^2/kg

４. 力学的エネルギー保存則を使い、地球（質量M）から脱出するのに必要な初速度v_0 が、

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad \text{(3-3-16)}$$

であることを示せ。ここで、地球の半径をR、万有引力定数をGとする。また、この式に数値を代入し、v_0 [km/s] の値を求めよ。